

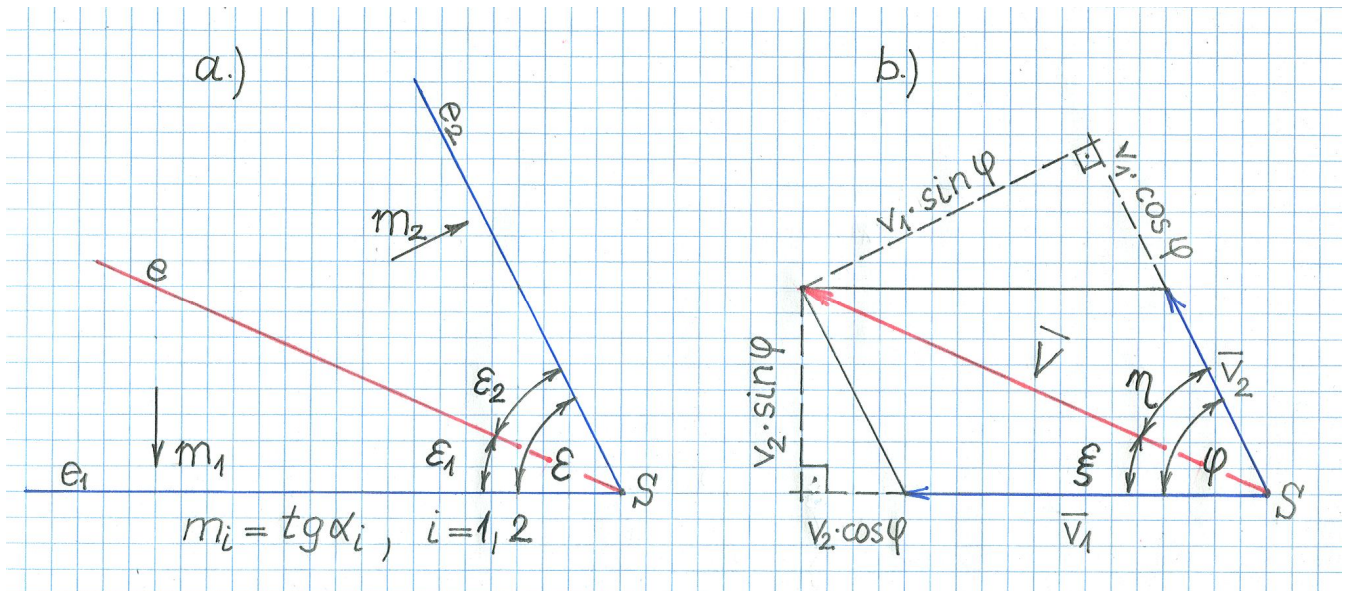
Az ereszsarok szögének két részre osztása paralelogramma - szerkesztéssel

Egy korábbi dolgozatunkban – címe: *A szintvonalas eljárásról* – levezettük, hogy fennállnak az alábbi összefüggések az e_1 , e_2 ereszvonalak és az élgerinc e alaprajzi vetülete által bezárt szögek között, ahol α_1 , α_2 az e_1 , e_2 ereszekből induló tetősíkok dőlésszögei – ld. az 1. / a ábrát is! – :

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \cos \varepsilon}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} + \cos \varepsilon}, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (3)$$



1. ábra

Az 1. / b ábra alapján felírható, hogy

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{v_2 \cdot \sin \varphi}{v_1 + v_2 \cdot \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\frac{v_1}{v_2} + \cos \varphi}, \quad \text{tehát}$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\sin \varphi}{\frac{v_1}{v_2} + \cos \varphi}. \quad (4)$$

Hasonlóan:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{v_1 \cdot \sin \varphi}{v_2 + v_1 \cdot \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\frac{v_2}{v_1} + \cos \varphi}, \text{ tehát}$$

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\sin \varphi}{\frac{v_2}{v_1} + \cos \varphi}. \quad (5)$$

Az 1. / b ábra szerint még a

$$\varphi = \xi + \eta \quad (6)$$

összefüggés is fennáll.

Most hasonlítsuk össze az (1), (2), (3) és a (4), (5), (6) képleteket!

Azt találjuk, hogy teljesen egyező alakúak, ha fennállnak az alábbi kapcsolatok:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varepsilon, \\ \xi &= \varepsilon_1, \\ \eta &= \varepsilon_2, \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

A (7) képlet utolsó egyenlete szerint írható, hogy

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= k \cdot \operatorname{tg} \alpha_1, \\ v_2 &= k \cdot \operatorname{tg} \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ahol k egy *arányossági tényező*.

Bevezetve a tetősíkok

$$m_i = \operatorname{tg} \alpha_i, \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

meredekségét, (8) és (9) - cel kapjuk, hogy:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= k \cdot m_1, \\ v_2 &= k \cdot m_2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Fentiek alapján az ereszsarok szögének két részre osztását – élgerinc esetén – az alábbiak szerint végezhetjük el szerkesztéssel, ha adott ε , α_1 és α_2 – v.ö. 1. ábra!

- 1.) Megrajzoljuk a $\varphi = \varepsilon$ hajlásszögű e_1 és e_2 félegyeneseket, az S sarokpontból.
- 2.) Felvesszük k értékét tetszőlegesen, de célszerűen.
- 3.) Meghatározzuk az adott dőlésű tetők meredekségét, (9) szerint.
- 4.) Kiszámoljuk a v_1 és v_2 vektor - hosszakat a (10) képlettel.
- 5.) Az e_1 és e_2 félegyenésekre felhordjuk a v_1 és v_2 hosszúságú szakaszokat.

6.) Elvégezzük a paralelogramma - szerkesztést.

7.) Lemérjük a $\xi = \varepsilon_1$ és az $\eta = \varepsilon_2$ szögek értékét az ábrából.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Mintapéllda

Az összemetsződő tetők hajlásszögei: $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$;

az ereszvonalak közbezárt szöge: $\varepsilon = 120^\circ$.

Határozzuk meg számítással, majd paralelogramma - szerkesztéssel az élgerinc alaprajzi vetülete és az ereszvonalak által közbezárt ε_1 és ε_2 szögeket!

Megoldás számítással

Az (1) képlettel:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \cos \varepsilon} = \frac{\sin 120^\circ}{\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} + \cos 120^\circ} = 0,7029 ,$$

innen:

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arctg} 0,7029 \cong 35,1^\circ , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_1 \cong 35,1^\circ .}} \quad (a)$$

Most (8) - ból:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 = 120^\circ - 35,1^\circ = 84,9^\circ , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_2 \cong 84,9^\circ .}} \quad (b)$$

Megoldás szerkesztéssel:

Felvéve a $k = 6 \text{ (cm)}$ tényezőt, (8) szerint:

$$v_1 = k \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = 6 \text{ (cm)} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 10,392 \text{ (cm)} , \text{ majd}$$

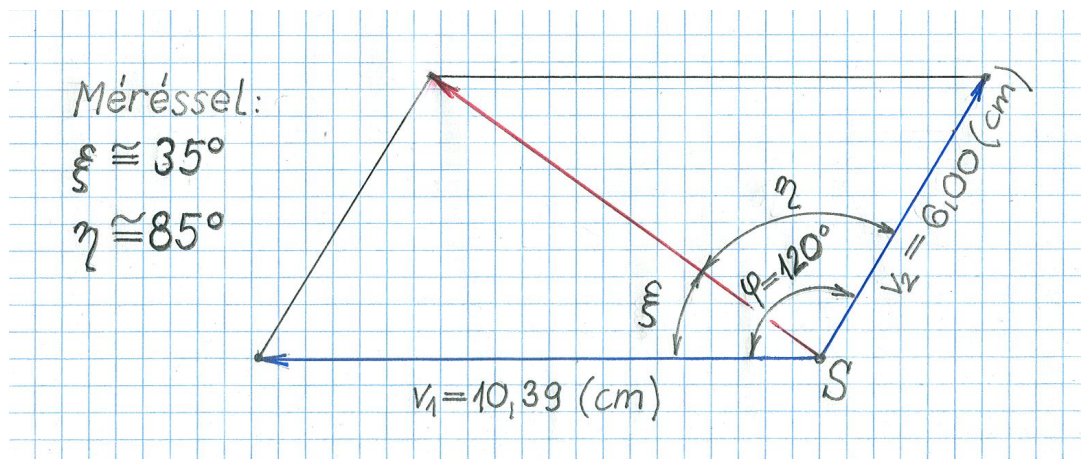
$$v_2 = k \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = 6 \text{ (cm)} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 6,000 \text{ (cm)} .$$

Ezekkel az adatokkal a paralelogramma - szerkesztés a 2. ábra szerinti.

A leolvasott eredmények:

$$\underline{\underline{\xi = \varepsilon_1 \cong 35^\circ ;}} \quad (c)$$

$$\underline{\underline{\eta = \varepsilon_2 \cong 85^\circ .}} \quad (d)$$



2. ábra

Az (a), (c) és a (b), (d) eredmények megnyugtatóan egyeznek. ☺

Feladat

Határozzuk meg az 1. / b ábra szerinti szerkesztéshez tartozó tetőadatokat!

Itt a bemenő adatok:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \arctg \frac{4}{2} = 63,4^\circ; \\ v_1 &= 7 \text{ (hosszegység)}, \\ v_2 &= \sqrt{2^2 + 4^2} \text{ (h.e.)} = 4,472 \text{ (h.e.)}. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Az elvégzett szerkesztés lemért eredményei:

$$(\varphi = \varepsilon \cong 64^\circ;)$$

$$\underline{\underline{\xi = \varepsilon_1 \cong 24^\circ;}} \quad (a1)$$

$$\underline{\underline{\eta = \varepsilon_2 \cong 40^\circ.}} \quad (b1)$$

A tetősíkok dőlése itt nem határozható meg, csak a meredekségek aránya.

Ugyanis a (10) képlet két egyenletet ad a három ismeretlenre, a k , m_1 és m_2 mennyiségekre. Ha pl. m_1 adott, akkor (10) -ből:

$$k = \frac{v_1}{m_1}, \quad m_2 = \frac{v_2}{k} = \frac{v_2}{v_1} \cdot m_1, \text{ azaz}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1.}} \quad (*)$$

Ez azt jelenti, hogy még ismerni kell az egyik tetősík dőlését / meredekségét is a megoldáshoz. Ha pl. $\alpha_1 = 45^\circ$, akkor (*) - gal is:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{4,472}{7} \cdot 1 = 0,6389 \rightarrow \alpha_2 = 32,6^\circ.$$

Ezek szerint az (a1), (b1) eredmények nem egy, hanem számtalan tetősík - pár élgerince helyzetének megadását jelenti, vagyis *a feladat határozatlan*.

Határozottá akkor válik, ha megadjuk az egyik tetősík dőlését / meredekségét.

Gondolhatnánk, hogy éljünk a $k = 1$ (hosszegység) választással. Ekkor (8) - ból:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_1}{k} = \frac{7}{1} = 7 \rightarrow \alpha_1 = \operatorname{arctg}7 = 81,9^\circ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{v_2}{k} = \frac{4,472}{1} = 4,472 \rightarrow \alpha_2 = \operatorname{arctg}4,472 = 77,4^\circ.$$

Az ilyen hajlású tetők is csak a

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{7}{4,472} = 1,565 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}$$

egyenlettel jellemezhető *tetősík - pár sereg* részei.

Erről pedig csak annyit mondhatunk, hogy $\frac{v_1}{v_2} > 1$ miatt $90^\circ > \alpha_1 > \alpha_2$.

Megjegyzések:

M1. Megdöbbenő, hogy milyen egyszerűen megoldható a címbeli feladat, az itt közölt módon. Emlékeztetőül: a vetületi ábrák szerkesztésén alapuló megoldás, vagy a szintvonalas eljárás szerkesztése ennél lényegesen nehezebb. Igaz, ezekkel egyidejűleg több metszészvonal – élgerinc és vápa – felülnézetét tudjuk megszerkeszteni.

M2. Az (1)...(3) képleteken alapuló számításos megoldásnál lényegesen gyorsabb lehet az itteni; különösen, ha nincs számológépünk, de van egy tangensfüggvény táblázatunk. Pontossága pedig – ahogyan az a mintapélda kapcsán látható – teljesen elegendő az építőipari igényekhez.

M3. Javasoljuk, hogy az Olvasó gondolja végig a vápa esetét, az itteniek és a korábbi dolgozatok alapján!

Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnökstanár

Szödliget, 2010. január 11.